MATEMÁTICA COMO LENGUAJE PARA LAS CIENCIAS ECONÓMICAS: FUNDAMENTOS Y ALCANCES

MATHEMATICS AS A LANGUAJE FOR THE ECONOMICS SCIENCES: THE BASICS AND SCOPE

Autores
Marcipar Katz, Susana- Nardoni, Marta- Zanabria, Claudia- Roldán, Gabriela

E-mail
g.roldan@live.com.ar

Eje Temático
Matemática en las ciencias económicas

Modalidad
Ensayos, producciones y/o comunicaciones

Palabras claves: Matemática como lenguaje- Aprendizaje- Contextos de las ciencias económicas

Resumen
Plantear a la matemática como lenguaje constituye una nueva perspectiva de investigación y también de su enseñanza. La tendencia a relacionar el aprendizaje de la matemática con los procesos de adquisición y uso de dicho lenguaje- en oposición a la enseñanza concepto a concepto- conduce a reformulaciones importantes acerca de los objetos de estudio y los fenómenos que hay que observar en el campo de la investigación educativa. Es una perspectiva que pretende sobre todo rescatar la construcción social que se pone en juego con la educación matemática, es la de considerar a la educación matemática como construcción social y cultural o dicho de otro modo *matemática como lenguaje.* En el presente trabajo se responde al siguiente interrogante: ¿cuáles son los fundamentos y alcances para adoptar en la formación profesional de las ciencias económicas la

perspectiva de matemática como lenguaje? Se ofrecen los lineamientos de una asignatura cuyos objetivos generales se expresan del siguiente modo. 1) *comprender el lenguaje matemático de manera que se realicen traducciones entre los diferentes sistemas semióticos tales como el algebraico, gráfico, numérico, lógico simbólico y coloquial para desarrollar autonomía en el aprendizaje pleno de conceptos matemáticos.* Y 2) *Analizar contextos a fines a las ciencias económicas tanto para representar sus características principales a través del lenguaje matemático como para otorgar sentido a los conceptos matemáticos al ser aplicados en situaciones socio-económicas*.

Introducción

Cualquier persona tiene el convencimiento de que matemática es una materia importante que los jóvenes de hoy deben estudiar, al mismo tiempo la mayoría no la comprende y además muchas personas que han terminado estudios universitarios (*) en los que recibieron educación matemática afirman con total naturalidad la inutilidad de las mismas en su ejercicio profesional.

Algo más, y peor aún, es que la mayoría de las personas que en algún momento de su vida tuvieron que enfrentarse con la obligación de aprenderlas, lo que recuerdan de ella es la sensación de angustia, ansiedad y malestar hasta que por fin se terminó el suplicio.

Lo paradójico es que todo el mundo supone que son importantes y que su estudio es necesario pero pocas personas se sienten a gusto con ellas; hasta el punto que en muchos países desarrollados en los que hay una plena conciencia en que la base tecnológica es la matemática, es totalmente aceptable que en un ambiente social se confiese su total ignorancia y hasta es una buena "tarjeta de presentación" explicitar la propia incapacidad para enfrentarse a ellas e incluso afirmar que le tienen fobia, sin embargo estas mismas personas sentirían vergüenza de confesar la ignorancia total en arte, literatura, historia o política.

Es que estas cuestiones son aceptadas como patrimonio de la humanidad y se las visualiza como construcciones sociales cuyo desconocimiento significa la negación de los aportes culturales de las generaciones actuales o pasadas; mientras que las matemáticas son consideradas como patrimonio de los matemáticos de los que su reputación intimida. Casi nadie piensa en matemática como algo construido, inventado y creado por el hombre, pocas personas consideran a la matemática como una construcción social y cultural.

(*) carreras universitarias en las que Matemática es una asignatura más de formación básica, es decir, aquellas que suelen denominarse *carreras no matemáticas* como por ejemplo: Lic. en Administración, Contador Público, Arquitectura, Veterinaria, Medicina, Ciencias Políticas, etc.

Todas estas cuestiones son casi anecdóticas pero nos dicen que algo pasa en el mundo con la educación matemática y entonces algo sucede con el rol de los docentes de matemática. Los profesores de matemática ¿sabemos realmente en qué razones se basa la actividad matemática que desarrollamos en las aulas? ¿realmente tenemos confianza en nuestros criterios para juzgar qué es importante y qué no? ¿de verdad sabemos qué deberíamos hacer?.
Estas preguntas básicas cobran mayor importancia cuando las consideramos en el contexto de dos áreas cada vez más problemáticas. Una es la preocupación sentida en muchos países por la dirección que debería tomar la educación matemática en vista de la creciente presencia en la sociedad de la tecnología relacionada con calculadoras y computadoras. La segunda cuestión se refiere al rumbo que debe tomar la articulación de la disciplina entre el nivel secundario y el universitario en pos de una fecunda inserción de los ingresantes y permanencia en los estudios universitarios.
Naturalmente, estas áreas problemáticas están relacionadas entre sí. La primera está relacionada con los valores educativos, sobre la importancia que adjudica la sociedad a diferentes tipos de conocimientos y saberes y sobre la relación que mantienen los individuos con esos conocimientos. Lo mismo ocurre con la segunda ya que las políticas educativas que se deciden, o no, emprender para abordar la articulación matemática de niveles educativos como de cualquier otra disciplina, están en estrecha vinculación con los valores que la sociedad le otorga a la educación, al conocimiento y a los saberes específicos. Es decir que ambas cuestiones tienen un denominador común que en definitiva es el condicionante cultural.
Entonces las preguntas básicas planteadas anteriormente cobran una dimensión social y cultural, es decir que para intentar una búsqueda de las posibles respuestas

a ellas, hay que indagar en un entramado de disciplinas y teorías que den cuenta de los aspectos didácticos, psicológicos, sociológicos, políticos y epistemológicos de la matemática.

Desde este punto de vista se comprende que el presente trabajo no tiene la pretensión de dar respuestas a dichas preguntas, en todo caso es un aporte para pensar a la articulación matemática entre el secundario y el universitario que supera lo estrictamente matemático.

Es una perspectiva que pretende sobre todo rescatar la construcción social que se pone en juego con la educación matemática, es la de considerar a la educación matemática como construcción social y cultural o dicho de otro modo *matemática como lenguaje.*

Fundamentos

Plantear a la matemática como lenguaje constituye una nueva perspectiva de investigación y también de su enseñanza. La tendencia a relacionar el aprendizaje de la matemática con los procesos de adquisición y uso de dicho lenguaje- en oposición a la enseñanza concepto a concepto- conduce a reformulaciones importantes acerca de los objetos de estudio y los fenómenos que hay que observar en el campo de la investigación educativa. Estos replanteos varían de unos autores a otros que responden a su vez a diferentes enfoques pero todos parten de una visión constructivista, lo que quiere decir que la matemática como lenguaje es una concepción enraizadas en el constructivismo.

Sin duda, la enseñanza de la matemática como lenguaje es un abordaje que surge a consecuencia o como impacto de las investigaciones -iniciadas a finales de la década del los `70- las que comienzan a considerar al "lenguaje de la matemática" como objeto de investigación. Para clarificar las dificultades de la apropiación del lenguaje matemático es necesario realizar una breve síntesis de las aportaciones dadas por varios autores. Uno de ellos, Hans Freudenthal (1983) plantea en su libro *"fenomenología didáctica de la estructura matemática"* que las dificultades del aprendizaje del álgebra se pueden analizar en comparación y contraste con aquellas que enfrentan los sujetos al aprender la lengua materna. Así, este autor brinda explicaciones acerca de los motivos que pueden darse a muchos de los errores que cometen los alumnos por ejemplo, podemos interrogarnos acerca del frecuente error que cometen los estudiantes al considerar el error de la expresión $(x +y)^2 = x^2 + y^2$ siendo dos las explicaciones que brinda. Una explicación es que la presencia y

posibilidad de rectificación de los llamados errores de sintaxis algebraica, como el de la sobre generalización de reglas o propiedades se explica por el hecho de que el álgebra simbólica es un lenguaje cuyo uso está restringido al aula, en contraste con el uso consuetudinario del lenguaje natural, el mismo uso que permite que, por ejemplo el error de conjugar como regulares verbos que no lo son tenga una rectificación a fuerza de su uso y retroalimentación frecuente. Otra explicación es que el lenguaje matemático (a diferencia del vernáculo) cuenta con la fuente más importante de formalización progresiva: la construcción algorítmica del vocabulario. Significa que en el lenguaje natural, los criterios de contenido más que los formales son los que deciden la estructura, inclusive conjugar un verbo irregular como si fuera regular o colocar un acento escrito sobre una letra equivocada, por lo general, no da lugar a equívocos de contenido y la comunicación no se altera mayormente en su contenido. Sin embargo, en matemática, el criterio del contenido o significado no es confiable. Por ejemplo, decir 5 veces 3 más 7 puede interpretarse de dos maneras: 5 (3 + 7)= 50 o bien (5. 3) + 7 = 15 + 7= 22 ; es decir que al usar esta expresión debe quedar perfectamente claro lo que ella significa, lo cual se consigue solamente con las estrictas reglas de puntuación que al utilizarlas aclaran cómo leerla e interpretarla.
Como contraste con el lenguaje vernáculo, Freudenthal (1983) utiliza el siguiente ejemplo tomado del inglés: *“ there were aged ladies and children in the bus”* y la siguiente: “there were aged ladies and gentlemen in the bus”; ambas oraciones son sintácticamente equivalentes sin embargo, aplicando un criterio de contenido, en la primera el adjetivo “aged” sólo puede referirse a ladies, mientras que en la segunda puede estar afectando tanto a ladies como a gentlemen.
Por su parte, las observaciones anteriores le han permitido a Vergnaud (1987) plantear la naturaleza del lenguaje matemático en cuanto a la condición indisociable del significado y significante, que conlleva al análisis de los aspectos semánticos y sintácticos del lenguaje matemático.
En publicaciones más recientes Morín, E. (2002); Arcavi, A. (2000 y 2015); Sfard, A. (2000 y 2003) referidas a la enseñanza de las ciencias y específicamente de la matemática, cobra interés el lenguaje matemático como objeto central para comprender la disciplina. A su vez, se indica que el dominio del lenguaje matemático es una condición necesaria para el desarrollo de la autonomía en el aprendizaje de la disciplina.

En virtud de lo anterior, en el presente trabajo se responde al siguiente interrogante: ¿cuáles son los fundamentos y alcances para adoptar en la formación profesional de las ciencias económicas la perspectiva de matemática como lenguaje?

Al revisar los escritos que refieren a la enseñanza de la matemática desde la perspectiva de *matemática como lenguaje* es posible encontrar diversos fundamentos fenomenológicos y epistemológicos. De todos ellos, hemos seleccionado los que más vinculación tienen con la formación básica de un profesional para las ciencias económicas. Son los que señalan la necesidad de otorgar "sentido" a los conceptos matemáticos.

Por ejemplo, Freudenthal (1983) evita el término "adquisición de concepto". En su lugar habla de la "constitución de los objetos mentales", lo que desde su punto de vista, precede a la adquisición de conceptos, y puede ser altamente efectivo, incluso si no le sigue la adquisición de conceptos. Es decir, cuando el estudiante comprende la utilidad de las matemáticas, le resulta más sencillo comprender el fenómeno en sus características totales. Así lo expresa:

"*Para enseñar grupos, en vez de empezar por el concepto de grupo y andar buscando materiales que hagan concreto ese concepto, se debería buscar primero fenómenos que pudieran compeler al estudiante a constituir el objeto mental que está siendo matematizado por el concepto de grupo. Si en una edad dada dichos fenómenos no están a disposición de los alumnos, uno abandona el intento —inútil— de inculcar el concepto de grupo"* (p. 32).

Por otra parte y a partir de los trabajos realizados sobre el sentido de los números (number sense) en los años 80 y comienzos de los 90, parecía natural pensar en extender la idea del sentido de los números desde el campo de la aritmética escolar al campo del álgebra. Algunos investigadores, como Fey (1990), comenzaron a desarrollar la idea y sus esfuerzos se orientaron a encontrar modos de enseñar el sentido de los objetos matemáticos.

Asimismo, Bruner J. en su libro Acts of Meaning (1990, p.20) estipula que una cultura y la búsqueda de los significados dentro de ella son las causas mismas de toda acción humana. Sfard (2003) afirma que la necesidad, culturalmente matizada pero esencialmente universal, de obtener significados y la necesidad de entendernos a nosotros mismos y al mundo que nos rodea, ha sido ampliamente reconocida como la fuerza motriz básica de todas nuestras actividades intelectuales.

Supuestos y lineamientos para educar en matemática como lenguaje

Como docentes universitarios tenemos el desafío de identificar las formas que debería tomar esa búsqueda de significados de los objetos matemáticos, si acaso se puede desarrollar y cómo es posible integrarla, fomentarla y apoyarla en la educación para las ciencias económicas. En la búsqueda de respuestas se encuentran algunos lineamientos o principios a tener en cuenta, a saber: 1) Convertir al lenguaje de la matemática en objeto de enseñanza. Esto se traduce en explicaciones de sintaxis y de semántica referidas a los símbolos matemáticos en los diferentes sistemas semióticos de representación; 2) Desarrollar el sentido de los conceptos matemáticos. Cuestión que se logra fundamentalmente con la identificación de contextos socio-económicos susceptibles de ser modelados, total o parcialmente, haciendo uso de la matemática.

Para concretar las ideas anteriores al contexto de la formación básica de los profesionales en ciencias económicas se hace necesario explicitar las hipótesis que delimitan la propuesta educativa, ellas son:

1°) *El lenguaje utilizado en Matemática no sólo es una expresión en la que se "comunican" los conceptos sino que es a través de él con el que se construye el concepto mismo.*

Es importante señalar que aún desde otras disciplinas es posible encontrar sustento en esta dirección, así Emilio Lledo, en su libro Filosofía y Lenguaje(1983, De. Ariel), expresa: "...el lenguaje, al serlo de un pensamiento, constituye no sólo una vía de acceso, sino además, una parte integrante y esencial de ese mismo pensamiento" (pág. 139). Al respecto pueden mencionarse investigaciones que definen la problemática del lenguaje matemático en términos de símbolos y lo que representan o, como en el caso de Vergnaud, en términos de la naturaleza de ser indisociables, uno de otro, del "significado y el significante (Vergnaud 1981)

2°) *El conocimiento matemático está íntimamente ligado a las habilidades lingüísticas matemáticas.*

Afirmación que surge embrionariamente por la historia de la construcción de conceptos matemáticos pero también se sustenta al otorgarle el mismo sentido en el que J. Hornemann, investigando una hipótesis de Piaget , encontró superioridad del grupo formado por alumnos que habían pasado por una escolaridad más prolongada que , de aquellos sujetos que presentaban pobreza verbal , pero... "

esa superioridad es más notable cuando se pasa de las situaciones más figurativas (como los vasos comunicantes) a las de mayor carácter simbólico (números y letras) y a las de soporte decididamente verbal (razonamiento verbal).” J.A. Castorina (1992). Por otro lado, desde la teoría Vigotskiana, los procesos educativos -sobre todo de la enseñanza formal- están llamados a desarrollar los aspectos superiores del psiquismo humano, procesos de tipo superior en el que uno de los elementos cruciales es el lenguaje y los instrumentos de mediación, utilizados con grados crecientes de abstracción. Es decir que si el lenguaje y los instrumentos de mediación son constitutivos (no de manera excluyente) de la conformación de los procesos de tipo superior del psiquismo humano, ¿porqué no pensar que para la comprensión de la matemática, en su estado de abstracción actual, se necesite de una “apropiación” de su lenguaje?

3°) *El estado actual de la matemática, como un lenguaje autosuficiente y formal, es el que se intenta comunicar a los estudiantes desde la enseñanza escolar hasta la universitaria y ello constituye uno de los factores que intervienen en la crisis del aprendizaje matemático.*
Como escriben Malet & Paradis (1984): “De aquella concepción lineal de las matemáticas surge una enseñanza también lineal. En esencia se tratará de explicitar rigurosamente los axiomas de partida y de demostrar, rigurosamente, los sucesivos resultados que de ellos se derivan. Esto que es una traición al espíritu real del trabajo matemático, es además una barbaridad pedagógica” (p.123). Tal vez, esta barbaridad pedagógica quede expuesta si aceptamos la idea de que el proceso educativo de matemática, debe ser inherente al proceso de desarrollo histórico de los conceptos matemáticos. Idea que se sustenta al considerar, metafóricamente, el modelo evolutivo que propone Vigotsky en el que “se contempla al proceso educativo como inherente a los procesos de desarrollo” R. Baquero (1996).
Lakatos (1976) señala que ”…en la práctica, el pensamiento del matemático no es nunca un pensamiento formalizado...la forma axiomático-deductiva es una etapa del todo legítima en sí pero, su supervalorización y su culto casi exclusivo tienen que denunciarse en nombre de la vida práctica de las matemáticas” (pág.76).
Así Lakatos plantea lo que denomina epistemología falibilista, capaz de dar cuenta de las gestiones matemáticas reales en toda su diversidad, en todos sus tanteos y

la necesidad de liberarse del mito axiomático y rechazar la distinción a la que conduce; por un lado, “el contexto del descubrimiento”del otro, el “contexto de la prueba”. Así Lakatos, piensa que una “lógica situacional” es posible. Una heurística, bien concebida, puede y debe rendir cuenta de todo lo que hay de racional en la investigación “informal”, más aún, agrega que es la comprensión de la fase de búsqueda la que permite comprender el significado de lo que ha sido encontrado.

Propuesta académica

Los fundamentos expuestos, las hipótesis enunciadas y los lineamientos establecidos permiten establecer una propuesta académica de una asignatura que denominamos “Matemática como lenguaje” cuyo propósito se oriente a mostrar una matemática como construcción social y cultural, diferenciándose de la educación tradicional (Schoenfeld, 1991) que se sustenta por una visión platónica de la matemática (Ernest, 1988). Así el propósito de la asignatura es mostrar una *matemática como ciencia en construcción*, visión sustentada por diversos documentos tales como los elaborados por National Council of teachers of Mathematics (NCTM), Comitee of Inquiry into the teaching of mathematics in school, (Informe Cockcroft), entre otros.

En la concepción de la enseñanza matemática que puede ser recogida de estos documentos, se describen las actividades a las que se ocupan los estudiantes para aprender matemática y estas actividades surgen de situaciones problemáticas que requieren razonamiento y pensamiento lleno de propósitos, reunir y aplicar información, descubrir, inventar y comunicar ideas y probar esas ideas a través de la reflexión crítica y la argumentación.

Para que los alumnos desarrollen estas actividades en el marco de una enseñanza de la matemática como ciencia en construcción, se debe pensar en un diseño didáctico-pedagógico similar a la de un taller de investigación con una distribución horaria que abarque el primer año universitario y una carga horaria de 90 horas.

Por ello los objetivos generales que se esperan alcanzar con la asignatura "matemática como lenguaje", quedan expresados de la siguiente manera:

- Comprender el lenguaje matemático de manera que se realicen traducciones entre los diferentes sistemas semióticos tales como el algebraico, gráfico, numérico, lógico simbólico y coloquial para desarrollar autonomía en el aprendizaje pleno de conceptos matemáticos.

- Analizar contextos a fines a las ciencias económicas tanto para representar sus características principales a través del lenguaje matemático como para otorgar sentido a los conceptos matemáticos al ser aplicados en situaciones socio-económicas.

Estos objetivos dan cuenta de dos ejes conceptuales en los se organizarán los procesos de enseñanza y contenidos disciplinares, a saber: Eje 1: El lenguaje de la matemática y Eje 2: Matemática en contextos.

Los contenidos mínimos en cada eje conceptual se agrupan del siguiente modo:

Eje 1: El lenguaje de la matemática

Elementos de conjunto y lógica proposicional. Estructura del pensamiento matemático: elementos primitivos, axiomas y teoremas. Tipos de razonamiento: inductivo y deductivo. Representaciones semióticas del lenguaje matemático. Números Reales: operaciones y propiedades. Funciones con dominio Real. Funciones racionales y trascendentes: diferentes representaciones semióticas.

Eje 2: matemática en contextos

Vectores y matrices: concepto, operaciones y propiedades. Aplicaciones a contextos socio-económicos. Sistemas de Ecuaciones lineales: Resolución de problemas. Teoría de juegos. Cadenas de Markov.

A modo de cierre: Las tareas que nos debemos

La propuesta de una asignatura “matemática como lenguaje” con las características descriptas requiere de tareas previas tales como la identificación de bibliografía adecuada y elaboración de material de estudio teórico y práctico. Asimismo, es fundamental la capacitación y organización de la planta docente a fin de poner en sintonía a todos los integrantes respecto a los nuevos objetivos y rol docente. Dicha capacitación debe conformarse teniendo en cuenta las siguientes condiciones:

- Recuperar la experiencia de los propios docentes, socializando y compartiendo al interior de la capacitación las propias vivencias, dudas, ansiedades e inseguridades.
- Construír un auténtico lugar de reflexión y autocrítica
- Desarrollar la capacidad de investigar
- Acompañar en la búsqueda de las identidades docentes
- Responder a las necesidades de los docentes.

Al pensar en una capacitación docente en Matemática como lenguaje, que responda a los puntos anteriores, necesariamente debemos pensar en cómo lograrlo y en ese sentido su estructura debe responder a la idea central de que “capacitación e investigación” van de la mano.

Es tarea del equipo de profesores, Titular y Adjuntos, garantizar la capacitación y actualización de la planta docente bajo las condiciones expuestas y garantizando los siguientes principios.

1.- Desarrollar una amplia comprensión de la matemática como fenómeno cultural. Para ello no sólo son buenos los enfoques históricos de los contenidos matemáticos sino también los enfoques antropológicos que dan cuenta de que diferentes culturas producen “otras matemáticas” que sustentan otros procedimientos para operar, medir, calcular inferir y analizar.

2.- Toma de conciencia de que la matemática como ciencia culturalmente construida contiene valores y que éstos por sí mismos no son ni buenos ni malos pero que la interacción de éstos con los valores presentes en los individuos y en las sociedades son los que determinan los efectos finales de las influencias de la Matemática en la sociedad.

3.- Examinar cuidadosamente las formas en que nosotros docentes de matemática visualizamos a dicha disciplina y se pueda tener conciencia de los sistemas de creencias que poseemos en relación a su enseñanza y a su aprendizaje. De esta manera seremos capaces de comprender las consecuencias, muchas veces no deseadas, que dichas asunciones o creencias tienen en nuestros alumnos. Ayudarnos entre los profesores a examinar nuestras creencias y nuestras prácticas, es una manera de desarrollar motivaciones intrínsecas para considerar juntos alternativas a nuestras prácticas actuales y a desarrollar razones personales para poder justificarlas.

4.- Un cuarto principio es que la capacitación se base en la resolución conjunta de problemas, que utilice a la modelización matemática como diseño didáctico pedagógico válido como proyecto de investigación para la capacitación.

5.- Crear condiciones para una acción reflexiva para estar “en” investigación como operación permanente de nosotros mismos, reconocer nuestros propios procesos para aprender y así poder aceptarnos en nuestras limitaciones, errores y dificultades cognitivas que nunca son muy diferentes de las que nuestros alumnos tienen.

Por último, estamos convencidas que desde ese espacio entre pares, como un lugar y modalidad de aprendizaje y reconocimiento mutuo, estaremos más cerca de llevar adelante nuevos planteos en la educación matemática que se conviertan en una manera gozosa de enseñar, aprender y vivir.

Referencias Bibliográficas

- A. Arcavi, & M. Isoda. (2007). "Learning to listen: from historical sources to classroom practice" Educational Studies in Mathematics, 66(2), 111-129.
- Bruner, J. (1990). *Acts of meaning*. Harvard University Press.
- Fey, J. (1990). "Quantity". In Steen, L.A. (Ed.), *On the Shoulders of Giants. New Approaches to Numeracy*. National Academy Press, Washington, D.C., pp. 61-94
- Karsenty, R., Arcavi, A. & Hadas, N. (2007). "Exploring informal mathematical products of low achievers at the secondary school level" Journal of Mathematical Behavior, 16(2), 156-177.
- Lakatos I,(1976) en " Proofs and Refutations" Cambridge University.
- Morín E. "*Introducción al pensamiento complejo"* Anthropos Editorial del Hombre, Barcelona España, 6ª Edición 2002.
- Sfard, A. (2000). "Symbolizing mathematical reality into being: How mathematical discourse and mathematical objects create each other". In P. Cobb, K. E. Yackel & K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating: perspectives on Mathematical Discourse, Tools, and Instructional Design*. Mahwah, NJ: Erlbaum, pp. 37-98).
- Sfard, A. (2003). "Balancing the unbalanceable: The NCTM Standards in the light of theories of learning mathematics". In J. Kilpatrick, G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematic.* Reston, VA: National Council for Teachers of Mathematics (NCTM), pp. 353-392.
- Vergnaud, G. (1987). Problem solving and concept development in the learning of mathematics. E.A.R.L.I. Second Meeting. Tübingen.